

# Temat 15

---

## Drugi na lodzie – Drzewa Steinera

### Streszczenie

Czasem drobna, pozornie mało znacząca, zmiana w sformułowaniu jakiegoś problemu, utrudnia w znaczący sposób jego rozwiązanie. Problem przedstawiony w tym scenariuszu przypomina wcześniej analizowany („Zablocone miasto”, zajęcia nr 9), gdyż dotyczy znajdowania najkrótszej drogi w sieci. Różnica polega na tym, że dozwolone jest dodawanie nowych punktów w sieci, co pozwala zmniejszyć długość drogi. W konsekwencji problem okazuje się o wiele bardziej złożony i w sensie algorytmicznym bliższy jest łamigłówkom przedstawionym w scenariuszach „Biedny kartograf” (zajęcia nr 13) i „Miasto turystyczne” (zajęcia nr 14).

### Wiek

✓ 7 i więcej

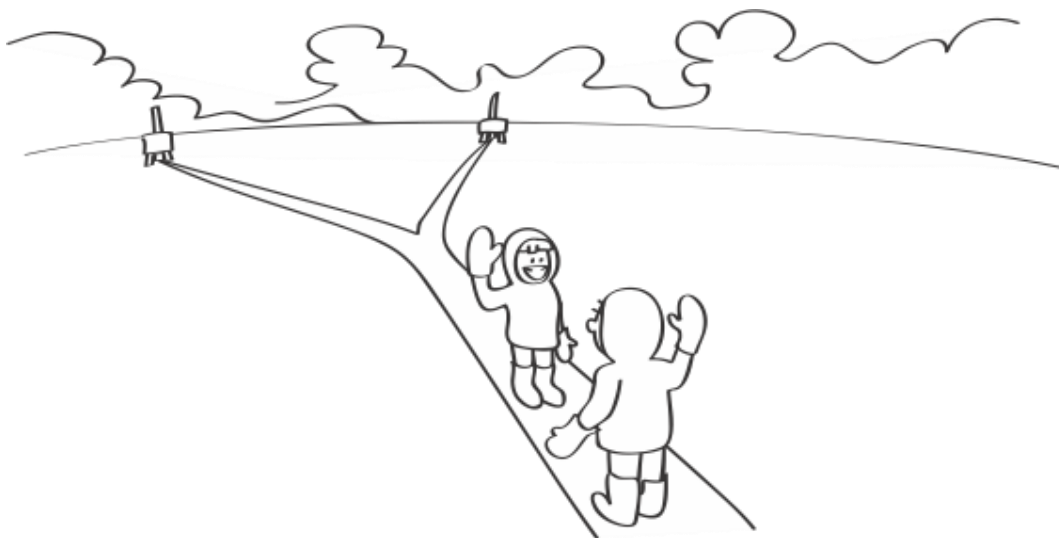
### Materiały

Każda z grup uczniów powinna otrzymać:

- pięć lub sześć kołków to umieszczenia w ziemi (np. kołki mocujące do namiotu lub elementy wieszaka na płaszcze)
- kilka metrów sznurka lub gumki
- linijkę lub taśmę do mierzenia
- długopis i papier do notowania

# Drogi na lodzie

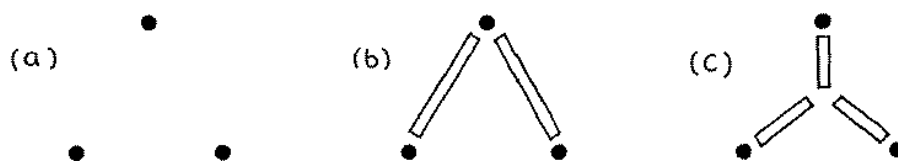
---



## Wprowadzenie

Historia opisana w scenariuszu „Miasto turystyczne” miała miejsce w bardzo gorącym kraju. W tym scenariuszu narracja dotyczy zupełnie innej części świata. Na mroźnej północy Kanady, zimą na powierzchni ogromnych zamrzniętych jezior – pługi śnieżne wytyczają drogi, które łączą miejsca działania wież wiertniczych w celu umożliwienia załogom na odwiedzanie się. Warunki klimatyczne wymagają, aby łączna długość budowanych dróg była jak najmniejsza. Pozostaje odpowiedzieć na pytanie o lokalizację dróg. Nie ma przy tym żadnych ograniczeń: drogi mogą być budowane w jakimkolwiek miejscu – jeziora są w całości zamrznięte i pokryte śniegiem. Ich powierzchnia jest płaska.

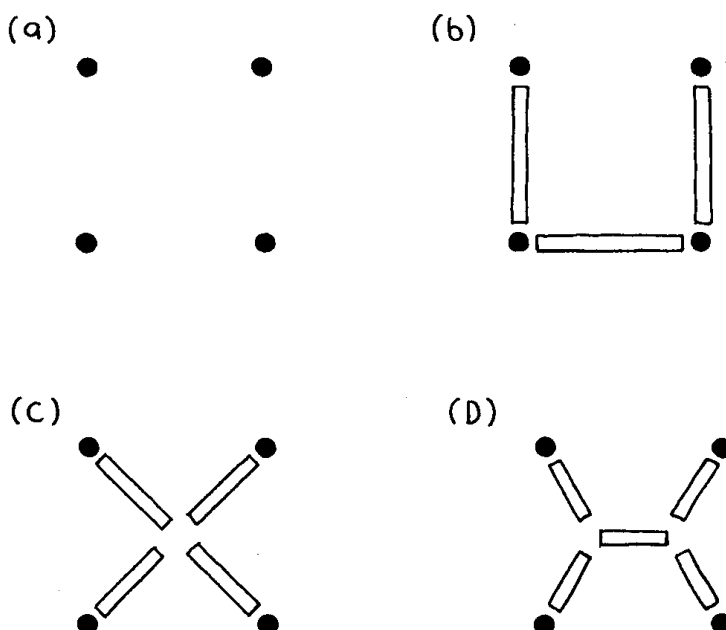
Droga powinna oczywiście składać się z prostych odcinków (tworzyć łamaną) – wprowadzanie łuków niepotrzebnie zwiększałoby długość drogi. Nie oznacza to jednak, że zadanie polega na dość prostym połączeniu odpowiednich lokalizacji prostymi odcinkami drogi – dodanie skrzyżowań może pozwolić na zredukowanie całkowitej długości dróg na lodzie – tę wartość chcemy uczynić jak najmniejszą.



Rysunek ukazuje, (a) trzy lokalizacje wież wiertniczych. Połączenie jednej z nich z pozostałymi dwoma (jak w (b)) daje w efekcie poprawnie zbudowaną sieć drogową. Innym rozwiązaniem będzie dodanie skrzyżowania gdzieś w środku i połączenie tego skrzyżowania odcinkami z każdą z lokalizacji (c). Okazuje się, że łączna długość odcinków tej drugiej sieci jest istotnie mniejsza. Tego rodzaju skrzyżowanie nosi w matematyce nazwę punktu Steinera, na cześć Jakuba Steinera (1796–1863), który sformułował opisywany problem i jako pierwszy spostrzegł, że szukana długość może zostać zredukowana przez wprowadzenie do sieci dodatkowych punktów. W naszym zadaniu możemy je traktować jako nowe, fikcyjne, miejsca działania wież wiertniczych.

## Dyskusja

1. Przedstaw uczniom problem, nad którym będą pracować. Używając przykładu opisanego we wprowadzeniu, pokaż uczniom, że w przypadku sieci z trzema wieżami wiertniczymi, najlepsze rozwiązanie wymaga dodania dodatkowego węzła sieci (fikcyjnej wieży).



2. Uczniowie będą zajmować się przypadkiem czterech wież, których lokalizacje przedstawione są schematycznie jako punkty, stanowiące wierzchołki kwadratu (rysunek a). W przypadku zajęć prowadzonych na zewnątrz uczniowie powinni rozpocząć pracę od wetknięcia czterech kołków w ziemię (np. trawnika) w taki sposób, by stanowiły wierzchołki kwadratu rozmiaru 1 metr na 1 metr.

3. Poleć uczniom, by wykonali kilka prób łączenia na różny sposób kołków sznurkiem lub gumką. Powinni zapisywać wyniki pomiaru długości całkowitej sznurka czy gumki. Na tym etapie uczniowie nie powinni posługiwać się dodatkowymi kołkami, które stanowiłyby punkty Steinera. (Najmniejszą z możliwych długości uzyskuje się, łącząc trzy kolejne kołki, co odpowiada narysowaniu trzech boków kwadratu. Ukazuje to rysunek b. Łączna długość sieci dróg to trzy metry.)

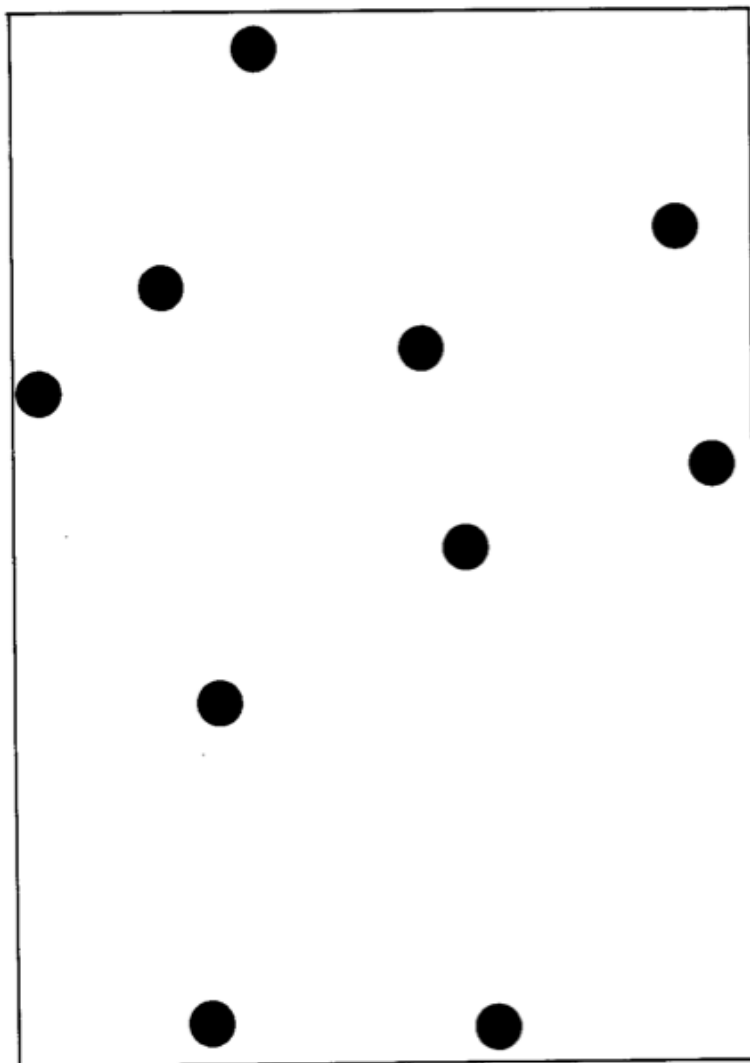
4. W drugim etapie uczniowie powinni poszukać lepszego rozwiązania problemu, używając dodatkowych kołków, najpierw jednego z potem dwóch. (Najlepszą jego lokalizacją jest środek kwadratu. Pokazuje to rysunek c. Łączna długość dróg wynosi wtedy  $2\sqrt{2}$  metra, w przybliżeniu 2,84 metra.) . Uczniowie (lub nauczyciel) powinni zasugerować poszukanie rozwiązania z użyciem dwóch kołków. (Okazuje się, że umieszczenie dwóch punktów Steinera w sposób ukazany na rysunku d, na którym kąty między odcinkami sieci są równe  $120^\circ$ , daje rozwiązanie w postaci sieci o łącznej długości  $1 + \sqrt{3}$  metra, czyli ok. 2,73 metra.)

5. W ostatnim etapie uczniowie powinni podjąć próbę dalszego ulepszenia rozwiązania, używając trzech kołków. Ta zakończy się jednak niepowodzeniem. (Nie jest po prostu możliwe znalezienie lepszego rozwiązania niż to z użyciem dwóch punktów Steinera.)

6. Na koniec podkreśl to, na czym polega trudność zadania, którym się zajmowali. (Nie wiadomo, gdzie umieścić punkty Steinera i trzeba dokonać wielu prób, by to sprawdzić.)

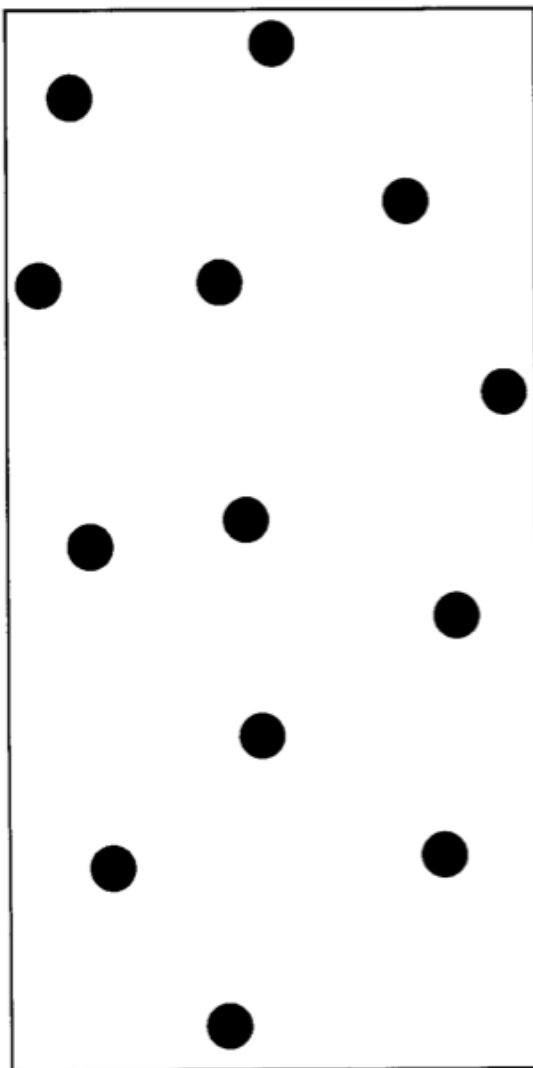
## Karta pracy. Drzewo Steinera. Przykład 1

Zaprojektuj sieć dróg łączących wieże wiertnicze w taki sposób, aby łączna suma długości dróg, zbudowanych na zamrzniętym jeziorze, była jak najmniejsza.



## Karta pracy: Drzewo Steinera. Przykład 2

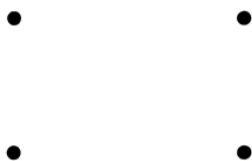
Zaprojektuj sieć dróg łączących wieże wiertnicze w taki sposób, aby łączna suma długości dróg, zbudowanych na zamrzniętym jeziorze, była jak najmniejsza.



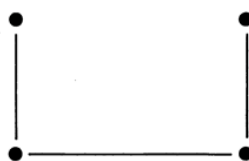
Page 132

## Modyfikacje i rozszerzenia

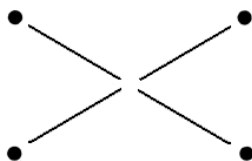
(a)



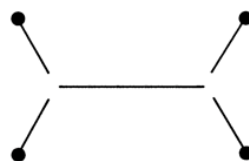
(b)



(c)



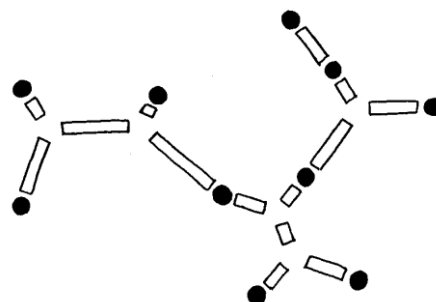
(d)



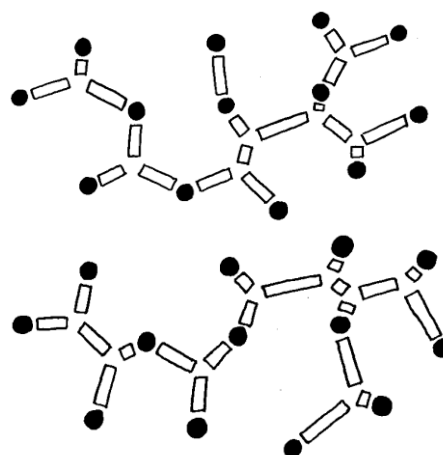
1. Grupy uczniów, które w krótkim czasie, rozwiążą problem dla wersji z kwadratem, mogą spróbować swoich sił próbując szukać rozwiązania dla wersji z prostokątem rozmiarów 1 metr na 2 metry. Uczniowie powinni odkryć, że dodanie jednego dodatkowego kołka nie pozwoli ulepszyć pierwotnego rozwiązania, w przeciwieństwie do rozwiązania z dwoma dodatkowymi. (Odpowiednie sumy długości dróg w sieci (drzewie) to odpowiednio cztery metry w sytuacji z rysunku b,  $2\sqrt{5}$  metra, czyli ok. 4,47 metra w sytuacji jak na rysunku c i  $2 + \sqrt{3}$ , czyli ok. 3,73 metra jak dla d.) Uczniowie powinni zastanowić się, dlaczego w przypadku prostokąta inaczej niż w przypadku kwadratu, nieskuteczne jest dodanie tylko jednego kołka. (Przyczyna tkwi w tym, iż przy przejściu z kwadratu do prostokąta w rozwiązaniu b zwiększa się tylko jeden odcinek, natomiast w rozwiązaniu c wydłużają się obie przekątne.)

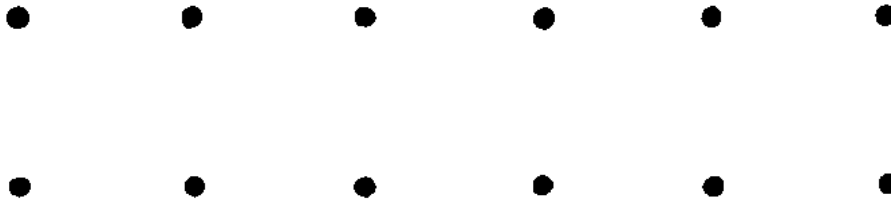
2. Starszym uczniom możemy zaproponować rozmiarów trudniejsze wersje zadania (z karty pracy). Uczniowie mogą zapisywać efekty kolejnych prób rozwiązania zadania, używając kopii karty pracy albo posługując się przezroczystą folią nałożoną na kartę pracy i wymazywalnymi pisakami. Mogą też wykonać odpowiedni model, posługując się kołkami wbitymi w ziemię. Wówczas uczniowie powinni informować na bieżąco o efektach kolejnych prób. (Rysunki po prawej stronie pokazują optymalne rozwiązanie dla przykładu z pierwszej karty pracy oraz dwa przybliżone rozwiązania o zbliżonej wartości dla przykładu z drugiej karty.) Istnienie dwóch różnych ale podobnych (w sensie łącznej długości dróg) rozwiązań jest znakomitą ilustracją dla odpowiedzi na pytanie o stopień trudności tego rodzaju problemów optymalizacyjnych – istnieje tak wiele potencjalnych lokalizacji punktów Steinera!

Drzewo Steinera  
(rozwiązanie optymalne)



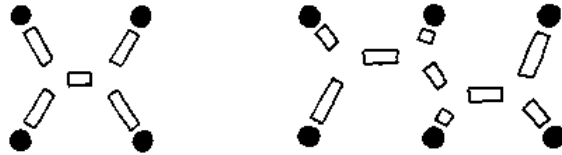
Drzewa Steinera  
(dwa rozwiązania przybliżone)



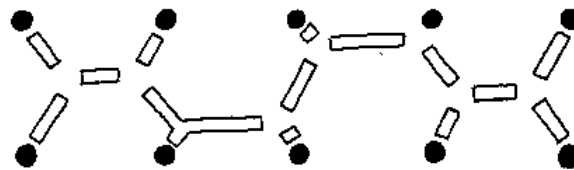
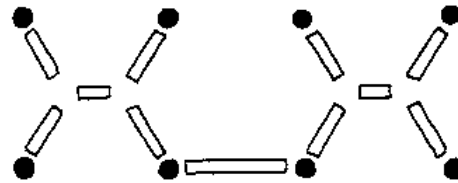


3. Do dalszych eksperymentów posłużyć mogą uczniom przykłady sieci zwanych drabinowymi.

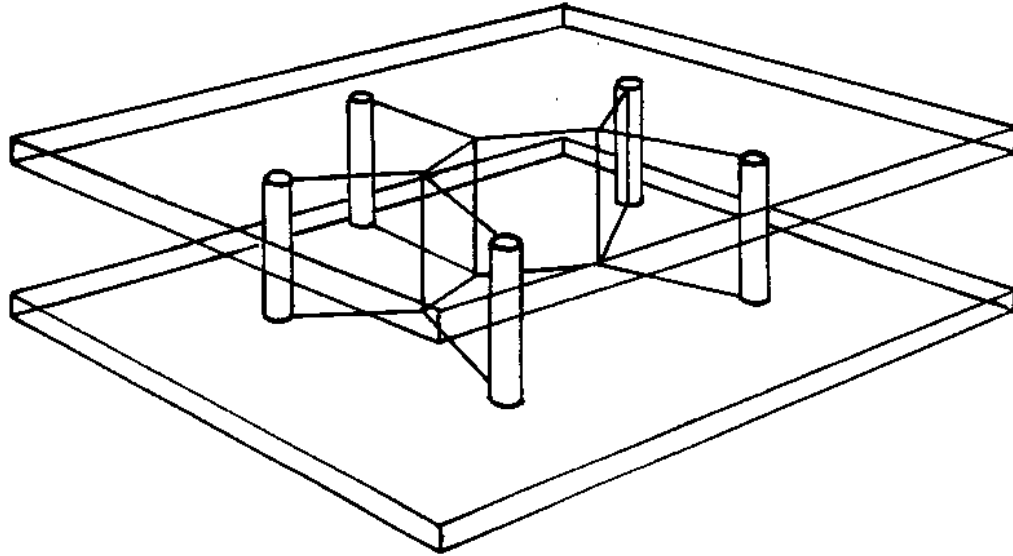
Przykłady drzew Steinera dla wybranych sieci pokazane jest na rysunkach po prawej stronie.



Drzewo dla drabiny dwuszczeblowej jest identyczne z tym dla kwadratu. Natomiast w przypadku drabiny trzyszczeblowej rozwiązanie jest już zupełnie inne -- co odkryjesz próbując je narysować z pamięci! Rozwiązanie dla czterech szczebli stanowią dwa drzewa Steinera połączone odcinkiem. Jednak w przypadku pięciu szczebli rozwiązanie jest nie jest już prostym połączeniem rozwiązań dla dwu- i trzyszczeblowej drabiny. Ogólnie rzecz biorąc, kształt minimalnego drzewa Steinera dla sieci drabinowych zależy od parzystości liczby szczebli. Jeśli jest ich parzysta liczba, to drzewo jest sumą drzew dla kwadratów uzupełnioną o odcinki łączące drzewa. W pozostałych przypadkach rozwiązanie przypomina ciąg rozwiązań dla trzech szczebli. Niełatwo jest jednak podać ścisły matematyczny dowód.



4. Jeszcze innym ciekawym pomysłem na zajęcia dla uczniów jest przygotowanie modeli drzew Steinera z użyciem baniek mydlanych. Wystarczy posłużyć się dwoma przezroczystymi płytami z plastiku i odpowiednią liczbą szpilek, które będą wyobrażać miejsca na lodowej powierzchni jeziora, które mają być połączone siecią dróg. Ukazuje to poniższy rysunek.



Model należy zanurzyć w roztworze mydła. Po wyjęciu błony mydlane powinny być widoczne pomiędzy szpilkami, tworząc piękny przykład drzewa Steinera.

Niestety niekoniecznie musi to być minimalne drzewo Steinera. Powierzchnie błon mydlanych tworzą optymalne układy tylko lokalnie. Globalnie optymalne rozwiązania dla całego zbioru szpilek mogą być zupełnie inne. Można wyobrazić sobie, że w przypadku szukania rozwiązania dla drugiego z układów z pkt. 2 tego podrozdziału, raz powierzchnie błon mydlanych przypominałyby jedno z przedstawionych wyżej rozwiązań przybliżonych, a innym razem drugie.



# O co w tym wszystkim chodzi?

---

Sieci (grafy), o których była mowa w tym scenariuszu, to minimalne drzewa Steinera. Nazywa się je „drzewami”, ponieważ nie zawierają cykli. Podobnie gałęzie na prawdziwym drzewie rosną w pewnym oddaleniu od siebie i nie zrastają się zwykle ze sobą. Sieci te nazywa się drzewami „Steinera”, ponieważ mogą zawierać dodatkowe wierzchołki, inne od wierzchołków wejściowych, które w sumie wraz z krawędziami tworzą drzewo. Nazywa się je „minimalnymi”, gdyż nie istnieją drzewa mniejszych rozmiarów (krótszej długości) łączące zadane punkty. W scenariuszu „Zablocone miasto” (zajęcia nr 9) rozwiązaniem ukazanych tam problemów były minimalne drzewa rozpinające: drzewa Steinera różnią się od tamtych w zasadzie tylko tym, że podczas ich wyznaczania dopuszczalne jest uzupełnienie wyjściowego zbioru punktów (lokalizacji) o dodatkowe punkty (skrzyżowania).

Interesujące jest to, że istnieje wydajny (efektywny) algorytm znajdowania minimalnego drzewa rozpinającego – metoda zachłanna, która polega na wielokrotnym powtarzaniu czynności łączenia krawędzią (odcinkiem) dwóch w danym momencie najmniej oddalonych od siebie wierzchołków (punktów), które nie są połączone żadną ścieżką. Nie ma natomiast prostego rozwiązania dla problemu minimalnego drzewa Steinera. Wynika to z tego, że nie ma prostej odpowiedzi na pytanie o miejsce umieszczenia dodatkowych punktów. Trzeba zaznaczyć, że trudność dotyczy nawet rozwiązań przybliżonych: dlatego dwa przybliżone rozwiązania jednego z przykładów przedstawionych w scenariuszu różnią się. Inaczej mówiąc: jeśli właściwe określi się pewnej wielkości obszary, w których powinny znaleźć się dodatkowe punkty, to doprecyzowanie ich położenia jest już sprawą względnie prostą. Potrafią to dobrze zrobić błony mydlane. Podobnie komputery.

Zagadnienie poszukiwania minimalnych drzew Steinera znalazło swe praktyczne zastosowanie w czasie wydarzeń związanych z rynkiem telekomunikacyjnym w Stanach Zjednoczonych i związane było z możliwością zaoszczędzenia dużych kwot pieniędzy. Przed rokiem 1967 (wówczas nastąpiła demonopolizacja rynku telekomunikacyjnego), wielkie firmy dzierżawiły linie telefoniczne od firm telekomunikacyjnych. Wielkość rachunku nie była obliczana na podstawie pomiaru wykorzystania rzeczywiście używanych kabli, ale na podstawie oszacowania kosztu wykorzystania kabli najkrótszej możliwej sieci zdolnej do realizacji połączenia sieci. Argumentacją dla takiego rozwiązania było uniemożliwienie pobierania wyższych opłat od klientów, które byłyby skutkiem stosowania przez firmy telekomunikacyjne okrężnych tras w sieci. Pierwotnie algorytm, który służył do naliczania opłat działał w oparciu o ustalanie odpowiedniego minimalnego drzewa rozpinającego. Jednak, około roku 1967, jeden z klientów firmy telekomunikacyjnej – pewna linia lotnicza, która w ramach prywatnej sieci telefonicznej dzierżawiła trzy wielkie centrale telefoniczne – zauważyła, że dodatkowa centrala telefoniczna w środku sieci spowodowałaby zmniejszenie długości sieci. W konsekwencji firma telekomunikacyjna została zmuszona do obniżenia opłat do wartości, jaka wynikałaby wprost z kalkulacji kosztów w przypadku istnienia dodatkowej centrali telefonicznej w punkcie Steinera! Chociaż, w typowym przypadku, długość minimalnego drzewa Steinera jest tylko od 5% do 10% krótsza od długości minimalnego drzewa rozpinającego, to wspomniane wyżej oszczędności mogą być istotne, gdy dotyczy to dużych kwot finansowych. Problem drzewa Steinera jest czasami określany jako problem najkrótszej sieci, ponieważ wiąże się z poszukiwaniem najkrótszej sieci, która łączy zbiór punktów.

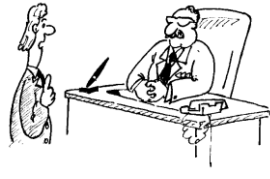
Po zapoznaniu się z dwoma wcześniejszymi scenariuszami o problemie kartografa i turystycznego miasta, czytający te słowa nie powinien być zaskoczony tym, że problem znajdowania minimalnego drzewa Steinera jest problemem NP-zupełnym. Wraz ze wzrostem rozmiaru problemu (liczby punktów do połączenia), rośnie liczna potrzebnych do rozpatrzenia przypadków lokalizacji punktów Steinera. Sprawdzenie wszystkich możliwości (przez proste przeszukiwanie) staje się praktycznie niemożliwe do wykonania. Problem jest jednym z tysięcy problemów, o których po prostu nie wiadomo, czy istnieją dla nich algorytmy o złożoności wielomianowej. Udowodniono natomiast, że znalezienie efektywnej metody rozwiązania jednego z problemów klasy NP-zupełnych oznacza istnienie takich metod dla pozostałych, np. problemu kolorowania grafu czy szukania minimalnych zbiorów dominujących w grafie.

W podsumowaniu do poprzedniego scenariusza wyjaśniliśmy, że skrót „NP” oznacza „niedeterministycznie wielomianowy” (ang. „non-deterministic polynomial”) a określenie „zupełny” odnosi się do faktu, o którym wspomnieliśmy w poprzednim akapicie: hipotetyczny algorytm wielomianowy dla jednego z problemów tej klasy można przekształcić w algorytmy rozwiązujące inne problemy. Zbiór problemów, które można rozwiązać w czasie wielomianowym nazywa się klasą P. Można więc postawić pytanie: czy  $P = NP$ ? Odpowiedź nie jest znana i jej poszukiwanie jest jedną z największych tajemnic współczesnej informatyki teoretycznej.

Problemy, które da się rozwiązać z użyciem algorytmów wielomianowych – nawet jeśli nie są one bardzo szybkie – nazywa się wykonalnymi (ang. „tractable”). Problemy, dla których nie istnieją takie algorytmy, nazywa się niewykonalnymi (ang. „intractable”), ponieważ niezależnie od szybkości komputera czy liczby komputerów używanych jednocześnie, problem jest praktycznie nie do rozwiązania (w rozsądnym czasie) nawet dla względnie niewielkich rozmiarów danych wejściowych. O problemach NP-zupełnych opisanych w trzech scenariuszach tego rozdziału książki (kolorowanie grafu, zbiory dominujące, drzewa Steinera) nie wiadomo, czy są wykonalne czy nie. Większość informatyków-naukowców pesymistycznie ocenia szansę znalezienia algorytmu wielomianowego dla problemów NP-zupełnych. Dlatego udowodnienie, że dany problem należy do klasy NP-zupełnych jest silną przesłanką do uznania go za niewykonalny.



*„Nie potrafię znaleźć wydajnego algorytmu. Jestem zbyt głupi.”*



*„Nie potrafię znaleźć wydajnego algorytmu, bo taki po prostu nie istnieje.”*



*„Nie potrafię znaleźć wydajnego algorytmu, ale nie potrafią tego i ci wszyscy sławni ludzie.”*

### **Co zrobić, gdy nie potrafisz znaleźć wydajnego algorytmu? Masz trzy możliwości**

Co możesz zrobić, gdy Twój szef wymaga od Ciebie wydajnego algorytmu, który znajduje optymalne rozwiązanie danego problemu, a Ty nie potrafisz go wymyślić? Taka sytuacja miała miejsce wówczas, gdy wspomniana linia lotnicza zorientowała się, że koszt dzierżawy linii telefonicznej można umniejszyć przez wprowadzenie punktów Steinera. Byłoby wspaniale, gdybyś potrafił (potrafiła) udowodnić, że nie ma efektywnego algorytmu rozwiązującego problem w sposób najlepszy z możliwych. Ale to jest bardzo trudne – kto wie, czy w przyszłości jakiś mądry programista nie natrafi na jakieś podstępne rozwiązanie problemu. Niestety jest więc mało prawdopodobne, byś znalazł się w sytuacji, kiedy to kategorycznie można wykluczyć istnienie wydajnego algorytmu, czyli uznać problem za niewykonalny. Ale jeśli potrafisz pokazać, że problem należy do klasy NP-zupełnych, to musisz pamiętać, że tysiące naukowców zajmowało się już problemami równoważnymi Twojemu i ich próby znalezienia efektywnego algorytmu zakończyły się niepowodzeniem. Krótko mówiąc: raczej nie otrzymasz od szefa premii, ale kary też nie!

Oczywiście, w rzeczywistości te problemy wymagają rozwiązywania na bieżąco i dlatego używa się tzw. heurystyk – algorytmów, które nie dają gwarancji znalezienia najlepszego możliwego rozwiązania, ale generują (metodą prób i błędów) rozwiązania dość bliskie optymalnych. Algorytmy heurystyczne mogą być bardzo szybkie, a negatywne konsekwencje braku możliwości znalezienia lepszego rozwiązania dość niewielkie, więc okazują się w praktyce być wystarczająco dobre do wykorzystania. Choć świadomość istnienia nieco lepszego harmonogramu czy nieco lepszego układu sieci czy dróg może być frustrująca.