

Temat 9

Zabłocone miasto – *Minimalne drzewa rozpinające*

Streszczenie

Nasze życie związane jest z funkcjonowaniem wielu sieci: telefonicznych, energetycznych, komputerowych i drogowych. W przypadku każdej z nich, zanim zostanie zbudowana, pojawia się pytanie o sposób jej rozmieszczenia. Sposób powinien być możliwie efektywny.

Wiek

- ✓ 9 lat i więcej

Materiały

Każde dziecko otrzyma:

- ✓ Kartę pracy: Problem zabłoconego miasta (s. 78)

Zabłocone miasto

Wprowadzenie

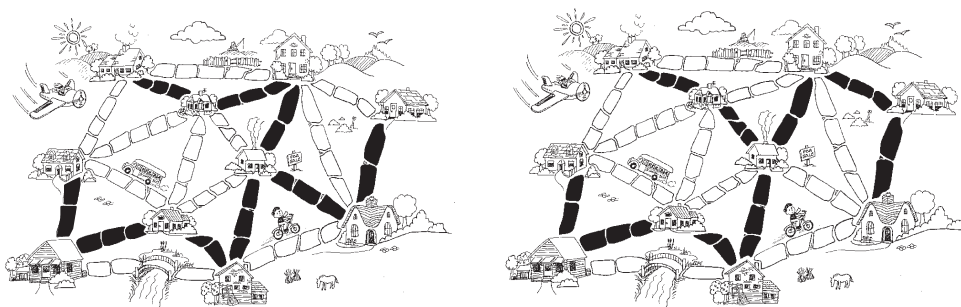
Te zajęcia mają ukazać w jaki sposób komputery można użyć do znalezienia najlepszych rozwiązań realnych problemów życia społecznego (np. efektywnego łączenia linii energetycznych).

Rozpoczynamy je od przedstawienia uczniom problemu zabłoconego miasta (s. 78)

Dyskusja

Wybrane dzieci przedstawiają swoje rozwiązania. Jakich strategii używali?

Jedna ze strategii wygląda tak: wybieramy kolejno drogi między domami zaczynając od najkrótszych. Pomijamy te drogi, które nie łączą nowych domów. Istnienie różnych rozwiązań wynika z innego porządku wyboru dróg tej samej długości. Dwa rozwiązania ukazane są poniżej.



Inna strategia: odrzucamy jedną za drugą te drogi, które nie są potrzebne. Wymaga ona jednak zwykle większego wysiłku.

Informatycy przedstawiają prawdziwe sieci w postaci grafów. Rozwiązania realnych problemów optymalizacji projektów sieci dróg lądowych czy powietrznych łączących różne miasta formułowane są w bardziej abstrakcyjnym języku teorii grafów.

Stworzono wiele innych algorytmów sformułowanych w języku teorii grafów, które można zastosować w praktyce np. do szukania najkrótszej drogi łączącej dwa węzły w sieci lub najkrótszej ścieżki łączącej wszystkie węzły.

Karta pracy: Problem zabłoconego miasta

Dawno, dawno temu w pewnym mieście nie było żadnej utwardzonej drogi. Poruszanie się po nim było szczególnie trudne po ulewach. Drogi opływały błotem, w którym z łatwością grzęzły samochody. Nietrudno wyobrazić sobie, jak brudne były buty mieszkańców.

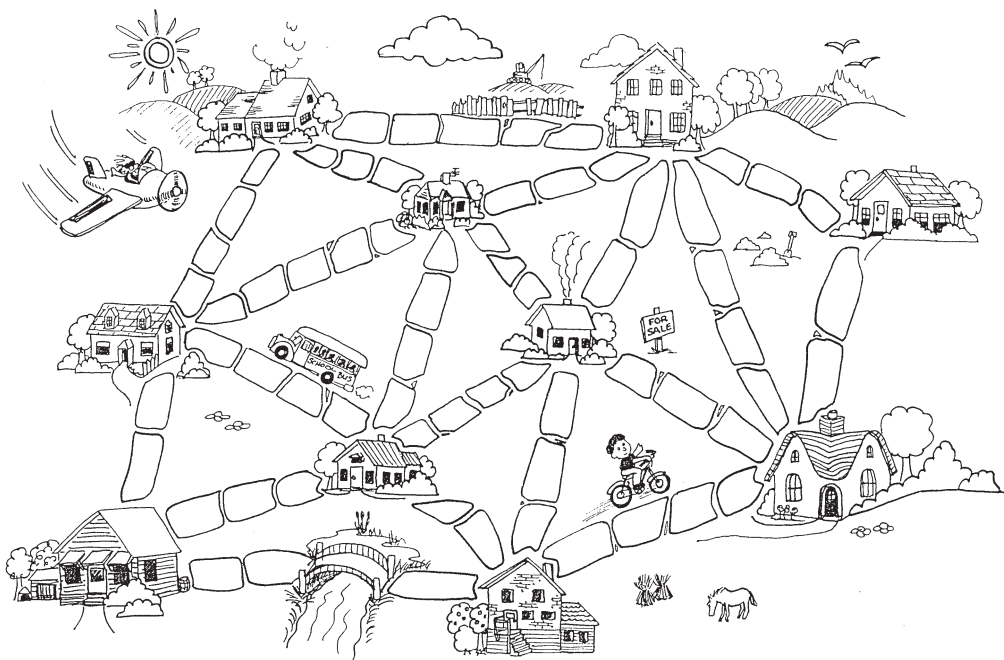
Burmistrz w końcu zdecydował, że część ulic musi być utwardzona (wybrukowana), ale nie chciał wydać na ten cel więcej pieniędzy niż to było konieczne. Chciał bowiem wybudować w mieście również basen. Określił zatem dwa warunki:

1. Z każdego domu do każdego innego domu musi prowadzić utwardzona droga (niekoniecznie najkrótsza z możliwych).
2. Koszt utwardzenia ulic powinien być najmniejszy z możliwych.

Poniżej znajduje się plan tego miasta. Liczba kamieni (brukowców) umieszczonych między poszczególnymi domami określa koszt utwardzenia tej drogi.

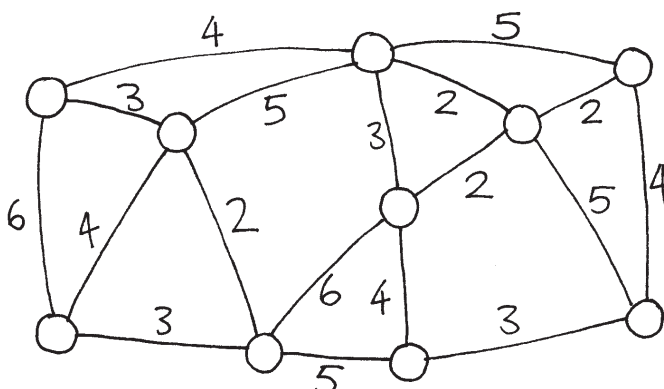
Znajdź możliwie najlepszy sposób połączenia domów utwardzoną drogą. Określ jego koszt.

Jaką strategię można wykorzystać do rozwiązania tego zadania?



Dodatkowe

Oto uproszczony sposób zobrazowania domów i łączących je dróg:



Domy przedstawione są jako okręgi, drogi jako linie. Długość drogi opisana jest liczbą.

Informatycy i matematycy często używają tego rodzaju diagramów do zilustrowania podobnych problemów. Nazywają je grafami.

Uwaga: Nie ma konieczności zachowania skali podczas rysowania krawędzi grafu.

Stwórz własną mapę ilustrującą problem zabloconego miasta.

Daj koleżdze do rozwiązania.

Potrafisz określić, ile dróg łączących dwa miasta, jest konieczna ale i wystarczająca? W jaki sposób zależy ona od liczby wszystkich miast?

O co w tym wszystkim chodzi?

Wyobraź sobie, że projektujesz sposób dostarczania prądu elektrycznego, gazu czy wody do domów nowego osiedla. Powstanie sieć kabli lub rur łączących wszystkie domy z dostawcą danej usługi. Każdy z budynków musi być podłączony do sieci w jakimś miejscu, choć dla dostawcy to miejsce nie ma większego znaczenia.

Zadanie zaprojektowania sieci o najkrótszej możliwej długości nazywa się w teorii grafów problemem *minimalnego drzewa rozpinającego*.

Metody rozwiązania tego problemu mają zastosowanie nie tylko przy projektowaniu sieci elektrycznej czy gazowej; są przydatne również podczas budowy sieci komputerowych i telefonicznych, ropociągów oraz wyznaczania tras lotniczych. Trzeba oczywiście pamiętać, że konkretny problem może być bardziej złożony niż *problem zabłoconego miasta*: należy wziąć pod uwagę np. zarówno czas, koszt jak i komfort podróży. Algorytm rozwiązujący problem zabłoconego miasta służy wyłącznie do minimalizacji *całkowitej* długości drogi.

Metoda minimalnego drzewa rozpinającego jest często tylko jednym z elementów składowych rozwiązania problemów teorii grafów, np. problemu komiwojażera (wędrownego sprzedawcy), który chce odwiedzić każde z miast tylko jeden raz, pokonując najkrótszą możliwą drogę.

Istnieją efektywne metody (algorytmy) wyznaczania minimalnego drzewa rozpinającego. Jedną z metod polega na tym, że rozpoczynamy bez żadnego z połączeń i dodajemy je zaczynając od najkrótszych, przy czym dodajemy tylko te, które łączą nowe elementy sieci, wcześniej jeszcze niepołączone. Nazywana jest algorytmem Kruskala (J. B. Kruskal opublikował ją w roku 1956).

W przypadku wielu problemów, np. problemu komiwojażera, informatycy nie znaleźli do tej pory efektywnej metody znajdowania optymalnego rozwiązania.

Rozwiązania i wskazówki

Dodatkowe (s. 79)

Ile dróg (połączeń) potrzeba, jeśli w mieście jest n domów? Okazuje się, że optymalne rozwiązanie zawiera zawsze $n-1$ połączeń, ponieważ taka liczba zawsze pozwoli na połączenie n domów. Dodanie jednego spowodowałoby stworzenie niepotrzebnej alternatywnej drogi między domami.