Activité 9

La ville embourbée – *Arbres couvrants*

Résumé

Notre société est reliée par plusieurs types de réseaux : les réseaux téléphoniques, de distribution d'énergie, informatiques, routiers. Pour chacun de ces réseaux, il faut choisir où installer les routes, les câbles ou les liaisons radio. Il est nécessaire de trouver des moyens efficaces pour relier les objets au sein d'un réseau.

Liens pédagogiques

- ✓ Mathématiques : géométrie.
  Étudier les formes et l'espace : Trouver les chemins les plus courts sur une carte

Âge

- ✓ 9 ans et plus

Compétences

- ✓ Résoudre un problème

Matériel

Chaque enfant a besoin de :
- ✓ L'exercice : le problème de la ville embourbée (page 78)
- ✓ Jetons ou petits carrés de carton (environ 40 par enfant)

La ville embourbée

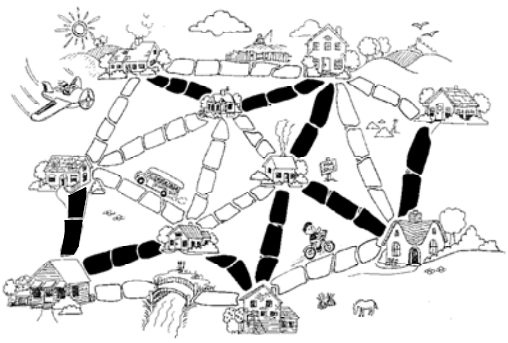
Introduction

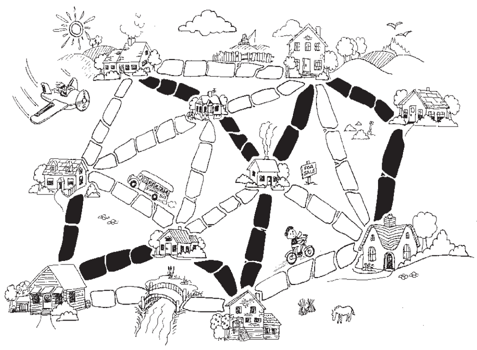
Cette activité montre que les ordinateurs servent à trouver les meilleures solutions possibles pour résoudre des problèmes de la vie de tous les jours, par exemple relier les habitations par des lignes électriques. Faites faire aux enfants l'exercice de la page 78, qui expose le problème de « La ville embourbée ».

Sujets de discussion

Comparez les solutions que les enfants ont trouvées. Quelles stratégies ont-ils utilisées ?

Une bonne stratégie pour trouver la meilleure solution consiste à démarrer avec une carte vide et à y ajouter progressivement des jetons jusqu'à ce que toutes les maisons soient reliées entre elles. Les chemins doivent être ajoutés dans un ordre de taille croissant sans relier les maisons qui le sont déjà. Les solutions peuvent être différentes selon l'ordre dans lequel les chemins de même longueur sont ajoutés. Vous trouverez ci-dessous deux solutions possibles.





Une autre stratégie consiste à commencer avec tous les chemins pavés puis à supprimer ceux dont on n'a pas besoin. Cela nécessite cependant beaucoup plus d'efforts.

Où peut-on trouver des réseaux dans la vie quotidienne ?

Les informaticiens désignent les représentations de ces réseaux par le terme « graphe ». Les réseaux réels peuvent être représentés par des graphes pour résoudre des problèmes tels que concevoir le meilleur réseau routier entre des villes proches ou le meilleur réseau aérien d'un pays.

Il existe également de nombreux algorithmes qui peuvent être appliqués aux graphes pour trouver la distance la plus courte entre deux points ou le chemin le plus court qui passe par tous les points.

Exercice : Le problème de la ville embourbée

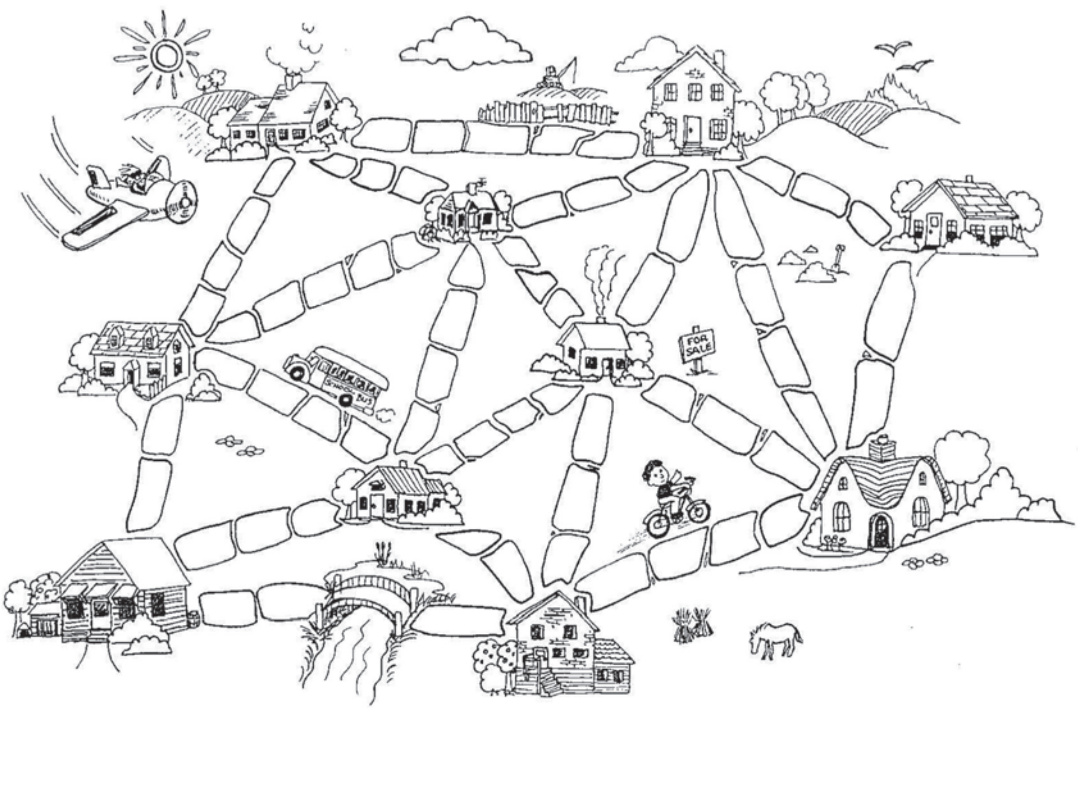
Il était une fois une ville qui n'avait pas de rues. Il était très difficile de circuler dans la ville après de fortes pluies car le sol était boueux, les voitures s'embourbaient et les bottes des habitants étaient toutes crottées. Le maire de la ville décida de paver certaines rues mais il ne voulait pas dépenser plus que nécessaire car il voulait également faire construire une piscine pour la ville. Le maire spécifia donc deux conditions :

1. Paver suffisamment de rues pour que chacun des habitants puisse se rendre de sa maison à n'importe quelle autre maison en empruntant des rues pavées.

2. Dépenser le moins d'argent possible pour paver ces rues.

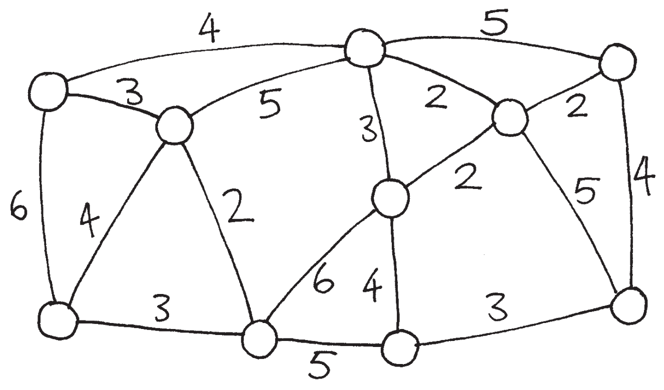
L'agencement de la ville est représenté ci-dessous. Le nombre de pavés entre chaque maison représente la dépense à engager pour paver la route. Trouve le meilleur chemin pour relier toutes les maisons mais utilise le moins de jetons (pavés) possible.

Quelles stratégies as-tu utilisées pour résoudre le problème ?



Variantes et activités supplémentaires

Voici une autre façon de représenter les villes et les routes :



Les maisons sont représentées par des cercles, les routes boueuses par des lignes et la longueur des routes est donnée par le nombre inscrit près de la ligne.

Les informaticiens et les mathématiciens utilisent souvent ce type de schéma pour représenter ces problèmes. Ils l'appellent « *graphe* ». Ce terme ne doit pas être confondu avec le terme « graphiques » ; les graphiques sont utilisés dans les statistiques pour désigner les tableaux de données numériques, comme les graphiques en barres, mais les graphes utilisés par les informaticiens sont différents. Les longueurs n'ont pas besoin d'être mises à l'échelle.

Crée tes propres plans de villes embourbées et teste-les sur tes amis.

Peux-tu trouver une règle pour décrire combien de routes ou de liaisons sont nécessaires pour obtenir la meilleure solution ? Est-ce que cela dépend du nombre de maisons dans la ville ?

Ce qu’il faut retenir

Suppose qu’il faille mettre en place la distribution de l’électricité, du gaz ou de l’eau dans une nouvelle commune. Il est nécessaire de créer un réseau de câbles ou de tuyaux pour relier toutes les maisons à la compagnie de distribution. Chaque maison doit être reliée au réseau en un point et la route choisie pour atteindre la maison importe peu, du moment qu’elle existe.

Le travail qui consiste à créer un réseau dont la longueur totale soit la plus courte possible est appelé problème de l’*arbre couvrant minimum.*

Les arbres couvrants minimaux ne sont pas seulement utiles pour les réseaux de gaz ou d’électricité, mais ils nous aident également à résoudre certains problèmes relatifs aux réseaux informatiques, téléphoniques, aux oléoducs ou aux voies aériennes. Cependant, lorsque vous choisissez l’itinéraire d’un voyage, vous devez prendre en compte l’aspect pratique du déplacement pour le voyageur tout autant que le coût. Personne ne veut passer des heures dans un avion qui fait un long détour par un autre pays sous prétexte que le billet est moins cher. L’algorithme de la ville sous la boue n’est pas d’un grand secours pour ces réseaux parce qu’il réduit simplement la longueur totale des routes ou des voies aériennes.

Les arbres couvrants sont également utiles dans la résolution d’autres problèmes sur les graphes tels que celui du « voyageur de commerce » qui essaie de trouver l’itinéraire le plus court pour passer par tous les points d’un réseau.

Il existe des algorithmes (méthodes) efficaces pour résoudre les problèmes des arbres couvrants minimaux. Une méthode simple donnant une solution optimale consiste à commencer sans aucune connexion puis à ajouter, dans un ordre de grandeur croissant, uniquement celles qui relient une partie de réseau qui n’était pas connectée auparavant. Il s’agit de l’algorithme de Kruskal, d’après le nom de J.B. Kruskal qui l’a publié en 1956.

Pour de nombreux autres problèmes de graphes, les informaticiens n’ont pas encore trouvé de méthodes suffisamment rapides dont les solutions soient les meilleures possibles pour résoudre les problèmes liés aux graphes, y compris celui du « voyageur de commerce ».

Solutions et astuces

Variantes et activités supplémentaires (page 79)

Combien de rues ou de connexions sont nécessaires si la ville comporte *n* maisons ? La solution optimale sera toujours exactement de $n - 1$ connexions car ce nombre est toujours suffisant pour relier les *n* maisons entre elles, alors que l’ajout d’une connexion supplémentaire créerait des chemins supplémentaires superflus entre les maisons.