

Δραστηριότητα 13

Ο φτωχός χαρτογράφος – Χρωματισμός Γράφων

Ηλικιακή Ομάδα	Από τις πρώτες τάξεις του Δημοτικού και πάνω.
Απαιτούμενες Ικανότητες	Χρωματισμός.
Χρόνος	30 λεπτά ή και περισσότερο.
Μέγεθος ομάδας	Κατάλληλη για μεμονωμένα άτομα μέχρι και για μια ολόκληρη τάξη.

Εστίαση

Επίλυση προβλημάτων.

Λογική συλλογιστική.

Αλγοριθμικές διαδικασίες και πολυπλοκότητα.

Περιγραφή διαισθητικών αντιλήψεων.

Περίληψη

Πολλά προβλήματα βελτιστοποίησης αφορούν καταστάσεις στις οποίες ορισμένα γεγονότα δεν μπορούν να συμβούν την ίδια στιγμή ή ορισμένα μέλη ενός συνόλου αντικειμένων δεν μπορούν να είναι γειτονικά. Για παράδειγμα, όποιος έχει προσπαθήσει να φτιάξει ένα πρόγραμμα μαθημάτων ή συναντήσεων θα έχει αντιμετωπίσει το πρόβλημα ικανοποίησης των περιορισμών που θέτουν οι εμπλεκόμενοι. Πολλές από αυτές τις δυσκολίες αποκρυσταλλώνονται στο πρόβλημα χρωματισμού γράφων, στο οποίο πρέπει να επιλεγθούν χρώματα για τις χώρες ενός χάρτη με τέτοιον τρόπο ώστε γειτονικές χώρες να έχουν διαφορετικά χρώματα. Αυτή η δραστηριότητα αφορά το συγκεκριμένο πρόβλημα.

Τεχνικοί Όροι

Χρωματισμός γράφων. Αλγόριθμοι εκθετικού χρόνου. Ευριστικές μέθοδοι.

Υλικά

Για κάθε παιδί θα χρειαστείτε:

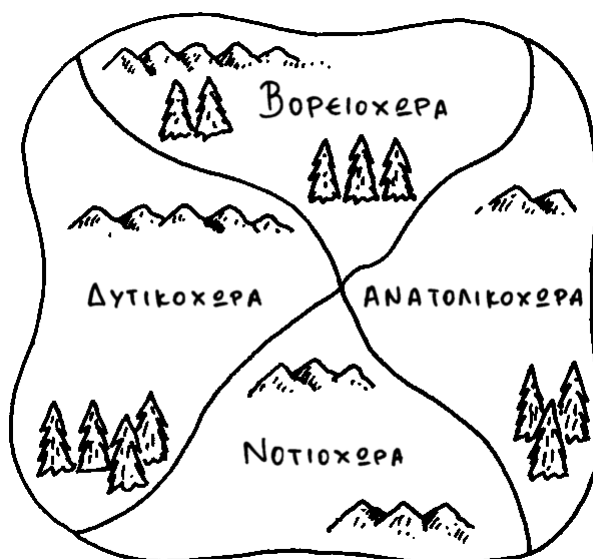
ένα αντίγραφο των ασπρόμαυρων πρωτοτύπων από τις σελ. 138 έως 141,

μικροί μετακινούμενοι χρωματιστοί δείκτες (π.χ. μάρκες, πούλια, πiónια) και

τέσσερις κηρομπογιές διαφορετικού χρώματος (ή ξυλομπογιές, μαρκαδόρους, κλπ.)

Θα χρειαστείτε επίσης:

έναν πίνακα ή παρόμοια επιφάνεια γραφής.



Σχήμα 13.1: Δείγμα ενός χάρτη προς χρωματισμό.

Τι να κάνετε

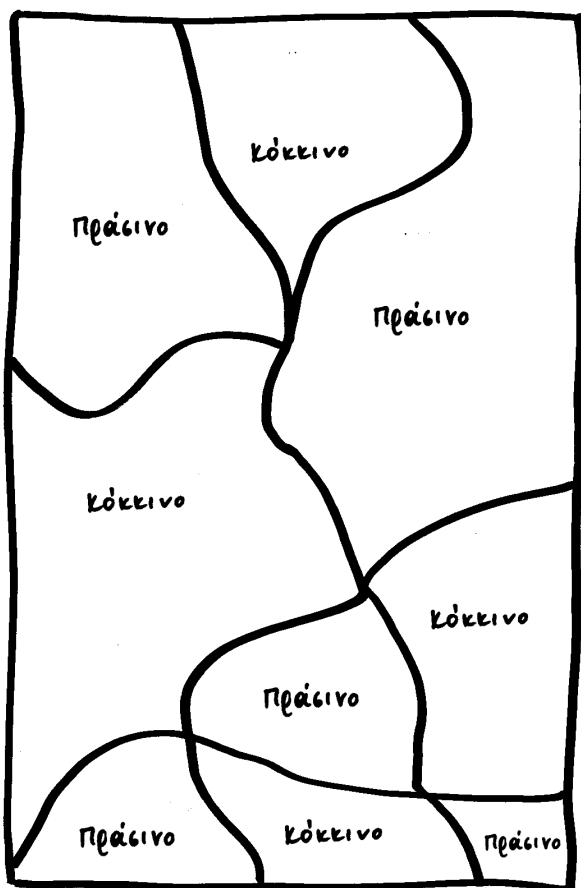
Αυτή η δραστηριότητα περιστρέφεται γύρω από μια ιστορία, στην οποία έχει ζητηθεί από τα παιδιά να βοηθήσουν έναν χαρτογράφο που χρωματίζει τις χώρες σε έναν χάρτη. Δεν έχει σημασία τι χρώμα έχει η κάθε χώρα, αρκεί να είναι διαφορετικό από εκείνο στις γειτονικές χώρες. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 13.1 φαίνονται τέσσερις χώρες. Αν χρωματίσουμε τη Βορειοχώρα κόκκινη, τότε η Δυτικοχώρα και η Ανατολιχοχώρα δεν μπορούν να είναι κόκκινες, γιατί έτσι θα ήταν δύσκολο να διακρίνουμε τα σύνορά τους με την Βορειοχώρα. Θα μπορούσαμε να χρωματίσουμε την Δυτικοχώρα πράσινη και είναι επίσης αποδεκτό να χρωματίσουμε και την Ανατολιχοχώρα πράσινη, αφού δεν έχει κοινά σύνορα με την Δυτικοχώρα. (Αν δύο χώρες έχουν μόνο ένα κοινό σημείο τότε θεωρείται ότι συνορεύουν, επομένως μπορούν να χρωματιστούν με το ίδιο χρώμα.) Η Νοτιοχώρα μπορεί να χρωματιστεί κόκκινη και καταλήγουμε να χρειαζόμαστε μόνο δύο χρώματα για το χάρτη.

Στην ιστορία μας, ο χαρτογράφος είναι φτωχός και δεν έχει χρήματα για πολλά χρώματα, οπότε η ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν όσο λιγότερα χρώματα γίνεται.

1. Περιγράψτε το πρόβλημα πάνω στο οποίο θα δουλέψουν τα παιδιά, επιδεικνύοντας τη διαδικασία χρωματισμού στον πίνακα.
2. Μοιράστε το ασπρόμαυρο πρωτότυπο της σελ. 138. Αυτός ο χάρτης μπορεί να χρωματιστεί σωστά χρησιμοποιώντας μόνο δύο χρώματα. Αν και ο περιορισμός του πλήθους των χρωμάτων σε δύο μπορεί να ακούγεται ως μεγάλη πρόκληση, το πρόβλημα είναι αρκετά απλό σε σύγκριση με χάρτες που απαιτούν περισσότερα χρώματα επειδή υπάρχουν πολύ λίγες επιλογές χρωμάτων για κάθε χώρα.

Βάλτε τα παιδιά να δοκιμάσουν να χρωματίσουν το χάρτη χρησιμοποιώντας μόνο δύο χρώματα. Στην πορεία ίσως ανακαλύψουν τον κανόνα του “πρέπει-να-είναι”: όταν μια χώρα χρωματιστεί, τότε κάθε γειτονική χώρα πρέπει να έχει το αντίθετο

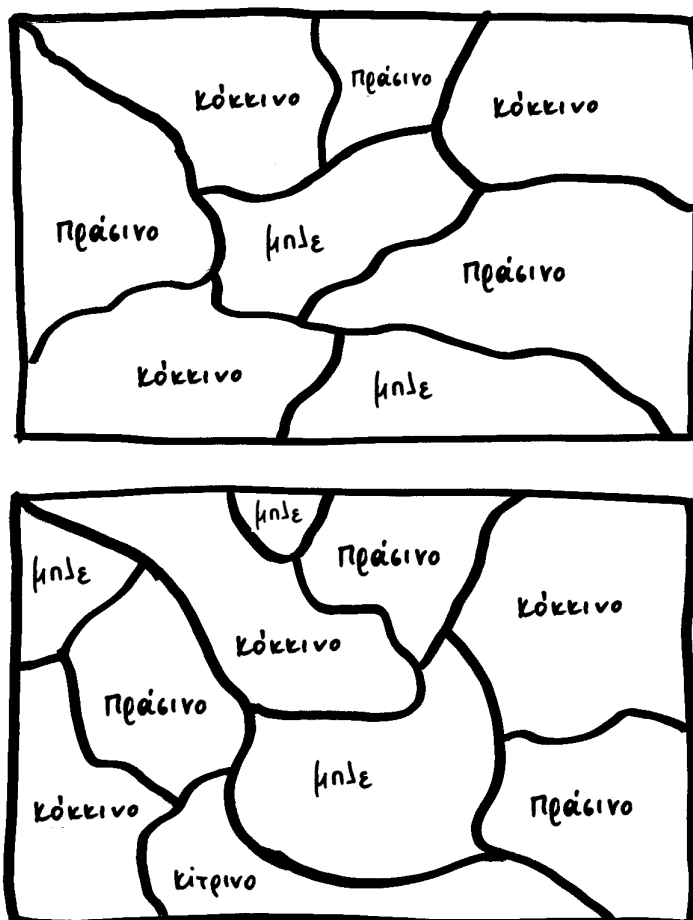
χρώμα. Αυτός ο κανόνας εφαρμόζεται επαναληπτικά μέχρι όλες οι χώρες να έχουν χρωματιστεί. Είναι προτιμότερο τα παιδιά να ανακαλύψουν μόνο τους αυτόν τον κανόνα, αντί να τους τον πουν, καθώς θα τους δώσει καλύτερη διαισθητική κατανόηση της διαδικασίας. Το Σχήμα 13.2 δείχνει την μοναδική δυνατή λύση για τον χάρτη της σελ. 138 (φυσικά, η επιλογή χρωμάτων εξαρτάται από το παιδί, αλλά χρειάζονται μόνο δύο διαφορετικά).



Σχήμα 13.2: Λύση για το χρωματισμό του χάρτη στη σελ. 138, χρησιμοποιώντας μόνο δύο χρώματα.

Τα παιδιά επίσης ίσως ανακαλύψουν ότι είναι καλύτερο να χρησιμοποιούν κάποιου είδους μετακινούμενους δείκτες, όπως χρωματιστές μάρκες ή πούλια, αντί να χρωματίζουν αμέσως τις χώρες, αφού έτσι είναι ευκολότερο να αλλάξουν γνώμη.

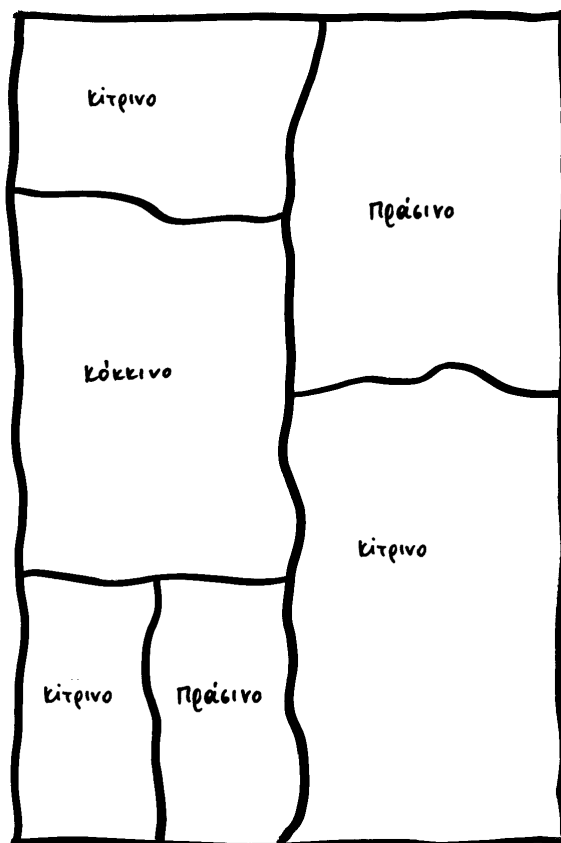
- Καθώς τα παιδιά ολοκληρώνουν κάθε άσκηση, τους δίνεται η επόμενη. Ο χάρτης στο πάνω μέρος της σελ. 139 μπορεί να χρωματιστεί σωστά χρησιμοποιώντας τρία χρώματα, ενώ εκείνος στο κάτω μέρος απαιτεί τέσσερα. Πιθανές λύσεις φαίνονται στο Σχήμα 13.3. Ο χάρτης στη σελ. 140 είναι ένας απλούστερος χάρτης τριών χρωμάτων, με μια πιθανή λύση να φαίνεται στο Σχήμα 13.4.



Σχήμα 13.3: Λύσεις για τον χρωματισμό των χαρτών στη σελ. 139, χρησιμοποιώντας αντίστοιχα μόνο τρία και τέσσερα χρώματα.

Αν πρόκειται για μεγαλύτερα παιδιά, ζητήστε τους να εξηγήσουν πως γνωρίζουν ότι έχουν βρει τον ελάχιστο δυνατό αριθμό χρωμάτων. Για παράδειγμα, απαιτούνται τουλάχιστον τρία χρώματα για τον χάρτη επειδή ο χάρτης περιλαμβάνει μια ομάδα τριών χωρών, κάθε μια από τις οποίες συνορεύει με τις άλλες δύο.

4. Αν κάποιο παιδί ολοκληρώσει νωρίς τις εργασίες, ζητήστε του να προσπαθήσει να κατασκευάσει έναν χάρτη που απαιτεί πέντε διαφορετικά χρώματα. Έχει αποδειχθεί ότι οποιοσδήποτε χάρτης μπορεί να χρωματιστεί μόνο με τέσσερα χρώματα, οπότε αυτό το πρόβλημα θα πρέπει να το κρατήσει απασχολημένο για αρκετή ώρα! Από την εμπειρία μας, τα παιδιά θα βρουν γρήγορα χάρτες που πιστεύουν ότι χρειάζονται πέντε χρώματα, αλλά φυσικά είναι πάντα εφικτό να βρεθεί για τους χάρτες τους μια λύση με τέσσερα χρώματα.



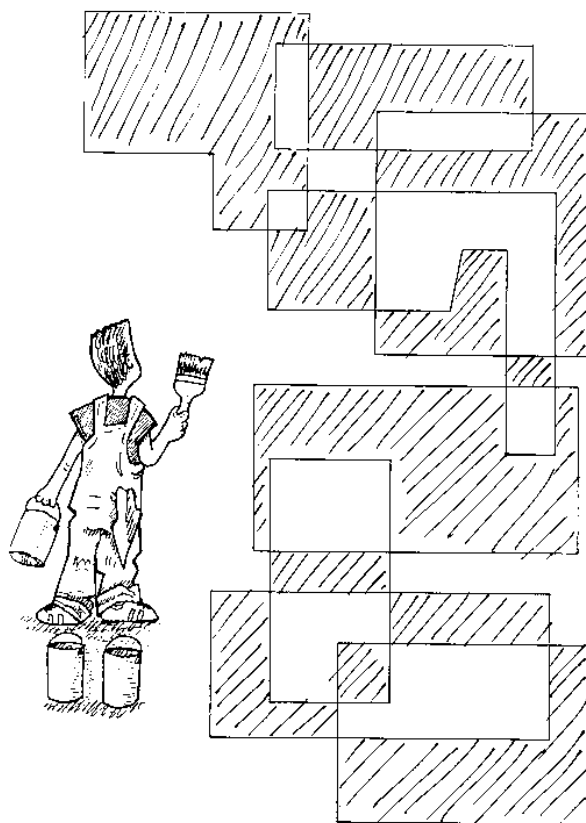
Σχήμα 13.4: Λύση για τον χρωματισμό του χάρτη στη σελ. 140, χρησιμοποιώντας μόνο τρία χρώματα.

Παραλλαγές και Επεκτάσεις

Υπάρχει ένας απλός τρόπος να κατασκευαστούν χάρτες που απαιτούν μόνο δύο χρώματα, όπως εκείνος στη σελ. 141 (λύση στο Σχήμα 13.5). Αυτός ο χάρτης κατασκευάστηκε επιθέτοντας κλειστά σχήματα (γραμμές των οποίων η αρχή συμπίπτει με το τέλος). Μπορείτε να σχεδιάσετε οποιοδήποτε πλήθος από τέτοια σχήματα, το ένα πάνω στο άλλο, και θα καταλήξετε πάντα με ένα χάρτη που μπορεί να χρωματιστεί με δύο χρώματα. Τα παιδιά μπορούν να πειραματιστούν με τη δημιουργία ενός τέτοιου χάρτη.

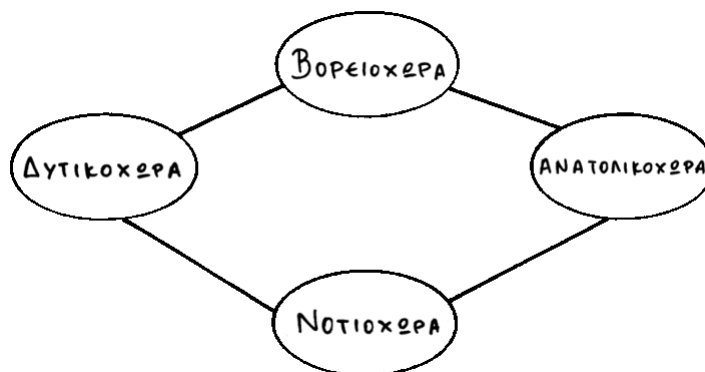
Τέσσερα χρώματα είναι πάντα αρκετά για να χρωματιστεί ένας χάρτης σχεδιασμένος σε μια κόλλα χαρτί ή σε μια σφαίρα (όπως η υδρόγειος). Μπορεί κανείς να αναρωτηθεί (όπως οι επιστήμονες που πληρώνονται για να το κάνουν) πόσα χρώματα χρειάζονται για χάρτες που είναι σχεδιασμένοι σε πιο παράξενες επιφάνειες, όπως ένας δακτύλιος. Σε αυτήν την περίπτωση, θα μπορούσε κάποιος να χρειαστεί πέντε χρώματα και πέντε είναι πάντα αρκετά. Ίσως τα παιδιά θα ήθελαν να πειραματιστούν με κάτι τέτοιο.

Υπάρχουν πολλές άλλες διασκεδαστικές παραλλαγές του προβλήματος χρωματισμού χαρτών, που οδηγούν σε κατευθύνσεις όπου πολλά πράγματα είναι προς το παρόν άγνωστα.

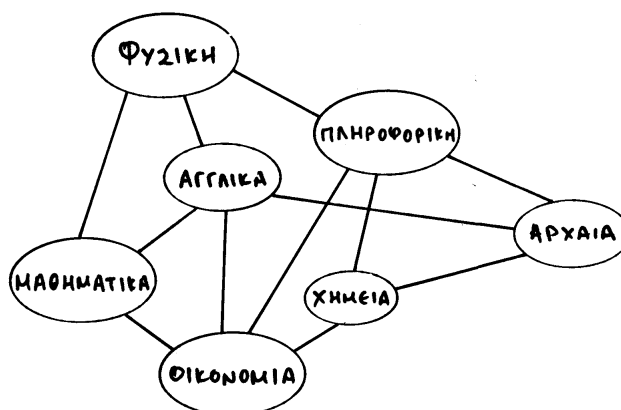


Σχήμα 13.5: Λύση για τον χρωματισμό του χάρτη στη σελ. 141, χρησιμοποιώντας μόνο δύο χρώματα. Τα χρώματα αναπαριστώνται ως σκιασμένο και λευκό.

Για παράδειγμα, όταν χρωματίζω μόνος μου έναν χάρτη σε ένα φύλλο χαρτί, τότε γνωρίζω πως αν εργαστώ έξυπνα επαρκούν τέσσερα χρώματα. Αλλά υποθέστε πως αντί να δουλεύω μόνος μου, δουλεύω με έναν ανίκανο (ή ίσως και αντίπαλο) συνεργάτη. Υποθέστε ότι εργάζομαι έξυπνα, ενώ ο συνεργάτης μου λειτουργεί απλά “νόμιμα”, καθώς χρωματίζουμε τις χώρες του χάρτη εναλλάξ. Πόσα χρώματα χρειάζεται να διαθέτουμε ώστε η εξυπνάδα μου να αναπληρώσει τις νόμιμες αλλά όχι και τόσο έξυπνες (ή ίσως και ανατρεπτικές) κινήσεις του συνεργάτη μου; Προς το παρόν γνωρίζουμε ότι 33 χρώματα θα είναι πάντα αρκετά, αλλά δε γνωρίζουμε αν απαιτούνται πάντα τόσα πολλά χρώματα. (Οι ειδικοί εικάζουν ότι λιγότερα από 10 χρώματα είναι επαρκή.) Στα παιδιά ίσως αρέσει να υποδυθούν αυτή την κατάσταση, που μοιάζει περισσότερο με παιχνίδι δύο παικτών. Σε μια παραλλαγή γνωστή ως αυτοκρατορικός χρωματισμός, ξεκινάμε με δύο διαφορετικούς χάρτες σε δύο ξεχωριστά φύλλα χαρτί, με το ίδιο πλήθος χωρών. Κάθε χώρα σε έναν από τους χάρτες (ας πούμε, στη Γη) είναι ζευγαρωμένη με ακριβώς μια χώρα στον άλλο χάρτη (που θα μπορούσε να είναι αποικίες στη Σελήνη). Επιπροσθέτως με τη συνήθη απαίτηση να έχουν διαφορετικό χρώμα οι χώρες που γειτνιάζουν (και για τους δύο χάρτες) προσθέτουμε την απαίτηση ότι κάθε χώρα στη Γη πρέπει να έχει το ίδιο χρώμα με την αποικία της στη Σελήνη. Πόσα χρώματα χρειαζόμαστε για αυτό το πρόβλημα; Η απάντηση είναι προς το παρόν άγνωστη.



Σχήμα 13.6: Παράδειγμα γράφου.



Σχήμα 13.7: Ένας άλλος γράφος.

Περί τίνος πρόκειται

Το πρόβλημα χρωματισμού χαρτών που διερευνήσαμε σε αυτήν τη δραστηριότητα είναι ουσιαστικά η εύρεση του ελάχιστου αριθμού χρωμάτων (δύο, τρία ή τέσσερα) που είναι απαραίτητα για να χρωματίσει κανείς έναν δεδομένο χάρτη. Η εικασία ότι οποιοσδήποτε χάρτης μπορεί να χρωματιστεί χρησιμοποιώντας μόνο τέσσερα χρώματα διατυπώθηκε το 1852, αλλά δεν αποδείχθηκε μέχρι το 1976. Η Πληροφορική είναι γεμάτη ανοιχτά προβλήματα και γνωρίζοντας ότι το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων αποδείχθηκε αφού είχε λάβει την προσοχή των ερευνητών για περισσότερα από 120 χρόνια είναι μια ενθάρρυνση για όσους εργάζονται σε άλλα προβλήματα των οποίων η λύση τους διαφεύγει για δεκαετίες.

Ο χρωματισμός χαρτών ανήκει σε μια γενική κατηγορία προβλημάτων γνωστή ως χρωματισμός γράφων. Στην Πληροφορική, ο γράφος είναι μια αφαιρετική αναπαράσταση σχέσεων [σ.σ. μεταξύ οντοτήτων]. Ένα παράδειγμα απεικονίζεται στο Σχήμα 13.6. [...] Στην πληροφορική, οι γράφοι σχεδιάζονται χρησιμοποιώντας κύκλους ή μεγάλες τελείες, που αποκαλούνται “κόμβοι” και αναπαριστούν αντικείμενα, με γραμμές ανάμεσά τους που υποδεικνύουν κάποιου είδους σχέση ανάμεσα στα αντικείμενα. Ο

γράφος στο Σχήμα 13.6 τυχαίνει να αναπαριστά το χάρτη του Σχήματος 13.1. Οι κόμβοι αναπαριστούν τις χώρες και μια γραμμή ανάμεσα σε δύο κόμβους υποδεικνύει ότι αυτές οι δύο χώρες μοιράζονται κοινά σύνορα. Στο γράφο, ο κανόνας χρωματισμού είναι ότι δύο συνδεδεμένοι κόμβοι δεν επιτρέπεται να έχουν το ίδιο χρώμα. Σε αντίθεση με έναν χάρτη, δεν υπάρχει όριο στο πλήθος των χρωμάτων που θα μπορούσαν να απαιτούνται για τον χρωματισμό ενός γενικού γράφου, επειδή πολλοί περιορισμοί μπορούν να σχεδιαστούν ως συνδέουσες γραμμές, ενώ η δισδιάστατη φύση των χαρτών περιορίζει τους πιθανούς τρόπους διευθέτησης. Το “πρόβλημα χρωματισμού γράφων” είναι να βρει κανείς τον ελάχιστο αριθμό χρωμάτων που απαιτείται για το χρωματισμό ενός συγκεκριμένου χάρτη.

Το Σχήμα 13.7 δείχνει έναν άλλο γράφο. Εδώ οι κόμβοι αντιστοιχούν σε σχολικά μαθήματα. Μια γραμμή ανάμεσα σε δύο μαθήματα δείχνει ότι τουλάχιστον ένας μαθητής παρακολουθεί και τα δύο μαθήματα, οπότε δεν επιτρέπεται να διεξαχθούν την ίδια διδακτική ώρα. Χρησιμοποιώντας αυτήν την αναπαράσταση, το πρόβλημα της εύρεσης ενός εφικτού προγράμματος χρησιμοποιώντας τον ελάχιστο αριθμό διδακτικών ωρών είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα του χρωματισμού, όπου τα διαφορετικά χρώματα αντιστοιχούν σε διαφορετικές διδακτικές ώρες. Οι αλγόριθμοι χρωματισμού γράφων έχουν μεγάλο ενδιαφέρον στην πληροφορική και χρησιμοποιούνται σε πολλά προβλήματα του πραγματικού κόσμου, αν και πιθανότατα δε χρησιμοποιούνται ποτέ για να χρωματίσουν χάρτες! Ο φτωχός μας χαρτογράφος είναι επινοημένος.

Υπάρχουν κυριολεκτικά χιλιάδες άλλα προβλήματα βασισμένα σε γράφους. Κάποια περιγράφονται αλλού σε αυτό το βιβλίο, όπως τα ελάχιστο δέντρο κάλυψης (minimal spanning tree) της Δραστηριότητας 9 και τα κυρίαρχα σύνολα (dominating sets) της Δραστηριότητας 14. Οι γράφοι είναι ένας πολύ γενικός τρόπος αναπαράστασης δεδομένων και μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αναπαραστήσουν διαφόρων ειδών καταστάσεις, όπως οι διαθέσιμες διαδρομές για να ταξιδέψει κανείς μεταξύ πόλεων, διασυνδέσεις μεταξύ των ατόμων ενός μορίου, διαδρομές που μπορούν να ακολουθήσουν τα μηνύματα σε ένα δίκτυο υπολογιστών, διασυνδέσεις μεταξύ των εξαρτημάτων μιας πλακέτας και σχέσεις ανάμεσα στις εργασίες που απαιτούνται για τη διεκπεραίωση ενός μεγάλου έργου. Για το λόγο αυτό, τα προβλήματα που περιλαμβάνουν αναπαραστάσεις με γράφους συναρπάζουν εδώ και καιρό τους επιστήμονες της πληροφορικής.

Πολλά από τα προβλήματα αυτά είναι πολύ δύσκολα— όχι δύσκολα εννοιολογικά, αλλά δύσκολα επειδή χρειάζονται πολύ χρόνο για να επιλυθούν. Για παράδειγμα, ο καθορισμός της αποδοτικότερης λύσης για ένα πρόβλημα χρωματισμού γράφου μεσαίου μεγέθους— όπως η εύρεση του καλύτερου προγράμματος για ένα σχολείο με τριάντα καθηγητές και 800 μαθητές— θα έπαιρνε χρόνια, ίσως και αιώνες, με έναν υπολογιστή που θα χρησιμοποιούσε τον καλύτερο γνωστό αλγόριθμο. Μέχρι να βρεθεί η λύση το πρόβλημα δε θα είχε πια σημασία— και μάλιστα υποθέτοντας ότι ο υπολογιστής δε θα χαλάσει η φθαρεί μέχρι να τελειώσει! Τέτοια προβλήματα λύνονται στην πράξη απλά επειδή ικανοποιούμαστε με υπο-βέλτιστες, αλλά και πάλι πολύ καλές, λύσεις. Αν επιμέναμε να εγγυηθούμε ότι η ευρισκόμενη λύση ήταν η καλύτερη δυνατή, το πρόβλημα δε θα ήταν διαχειρίσιμο.

Ο χρόνος που χρειάζεται ένας υπολογιστής για να λύσει προβλήματα χρωματισμού αυξάνεται εκθετικά με το μέγεθος του γράφου. Σκεφτείτε το πρόβλημα χρωματισμού

χαρτών. Μπορεί να λυθεί δοκιμάζοντας όλους τους πιθανούς τρόπους χρωματισμού του χάρτη. Γνωρίζουμε ότι απαιτούνται το πολύ τέσσερα χρώματα, οπότε χρειάζεται να αξιολογήσουμε κάθε συνδυασμό αναθέσεων των τεσσάρων χρωμάτων στις χώρες. Αν οι χώρες είναι n , υπάρχουν 4^n συνδυασμοί. Αυτός ο αριθμός μεγαλώνει ραγδαία: για κάθε χώρα που προστίθεται το πλήθος των συνδυασμών πολλαπλασιάζεται επί τέσσερα, άρα τετραπλασιάζεται και ο χρόνος λύσης. Ακόμα κι αν κατασκευάζονταν ένας υπολογιστής που θα μπορούσε να λύσει το πρόβλημα για, π.χ., πενήντα χώρες σε μια ώρα, η προσθήκη μιας χώρας θα απαιτούσε τέσσερις ώρες και θα χρειαζόνταν να προσθέσουμε μόνο δέκα χώρες για να κάνουμε τον υπολογιστή να χρειαστεί περισσότερο από έναν χρόνο για να βρει τη λύση. Αυτού του είδους το πρόβλημα δεν πρόκειται να εξαφανιστεί όσο κι αν εξακολουθούμε να κατασκευάζουμε ολοένα ταχύτερους υπολογιστές!

Ο χρωματισμός γράφων είναι ένα καλό παράδειγμα προβλήματος του οποίου ο χρόνος επίλυσης αυξάνεται εκθετικά. Για πολύ απλά στιγμιότυπα του προβλήματος, όπως οι μικροί χάρτες αυτής της δραστηριότητας, είναι αρκετά εύκολο να βρεθεί η βέλτιστη λύση, αλλά καθώς το πλήθος των χωρών αυξάνεται πέρα από τις δέκα, η χειρωνακτική επίλυση του προβλήματος γίνεται πολύ δύσκολη και με περισσότερες από εκατό χώρες ακόμα και ένας υπολογιστής θα χρειαζόνταν πολλά χρόνια για να δοκιμάσει όλους τους δυνατούς τρόπους χρωματισμού του χάρτη, ώστε να διαλέξει τον βέλτιστο.

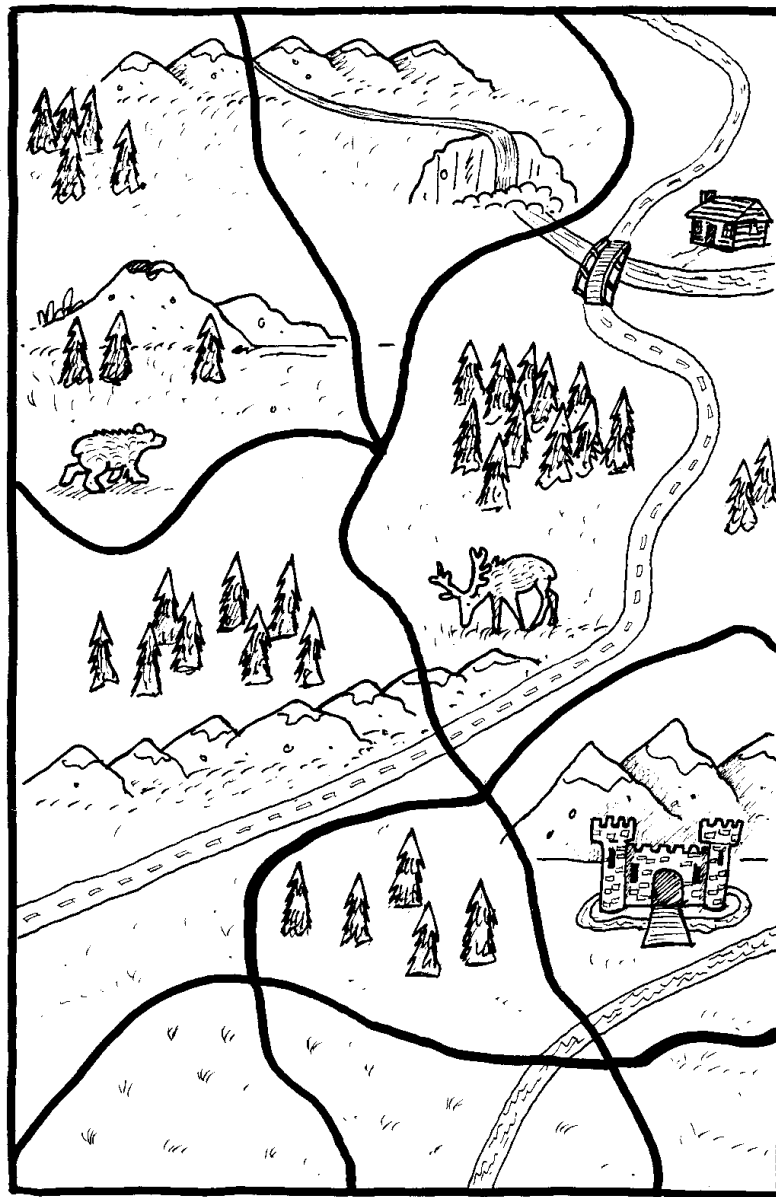
Πολλά προβλήματα του πραγματικού κόσμου είναι έτσι, αλλά πρέπει να λυθούν ούτως ή άλλως. Οι επιστήμονες της Πληροφορικής χρησιμοποιούν μεθόδους που δίνουν καλά, αλλά όχι τέλεια, αποτελέσματα. Αυτές οι ευριστικές τεχνικές είναι συχνά πολύ κοντά στο βέλτιστο, πολύ γρήγορες στον υπολογισμό και παρέχουν επαρκείς και πρακτικές λύσεις. Τα σχολεία μπορούν να ανεχτούν τη χρήση μιας επιπλέον τάξης που δε θα ήταν απαραίτητη αν το ωρολόγιο πρόγραμμα ήταν τέλειο και ίσως ο φτωχός χαρτογράφος μπορεί να έχει αρκετά χρήματα για ένα επιπλέον χρώμα, ακόμα κι αν δεν είναι απολύτως απαραίτητο.

Κανείς δεν έχει αποδείξει ότι δεν υπάρχει ένας αποδοτικός τρόπος επίλυσης αυτών των προβλημάτων σε συμβατικούς υπολογιστές, αλλά επίσης κανείς δεν έχει αποδείξει ότι υπάρχει, και οι επιστήμονες της πληροφορικής είναι επιφυλακτικοί αν θα βρεθεί ποτέ μια αποδοτική μέθοδος. Θα μάθουμε περισσότερα για τέτοιου είδους προβλήματα στις επόμενες δύο δραστηριότητες.

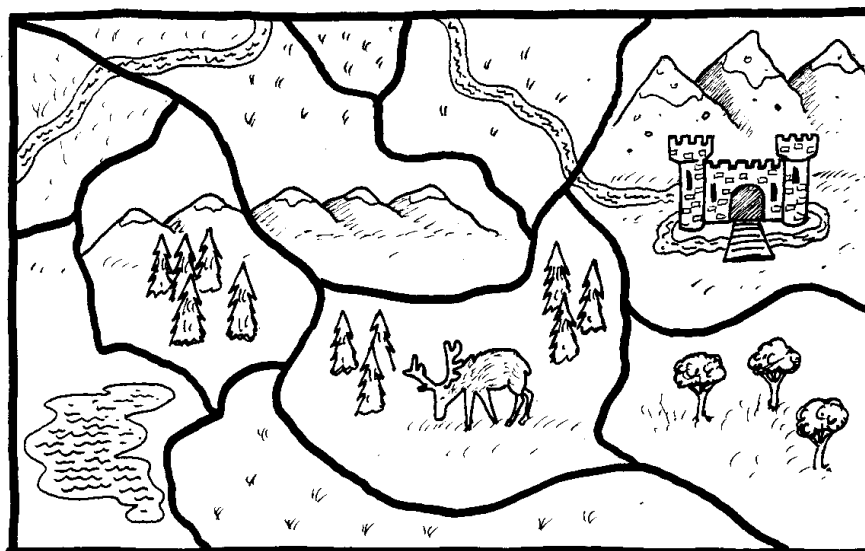
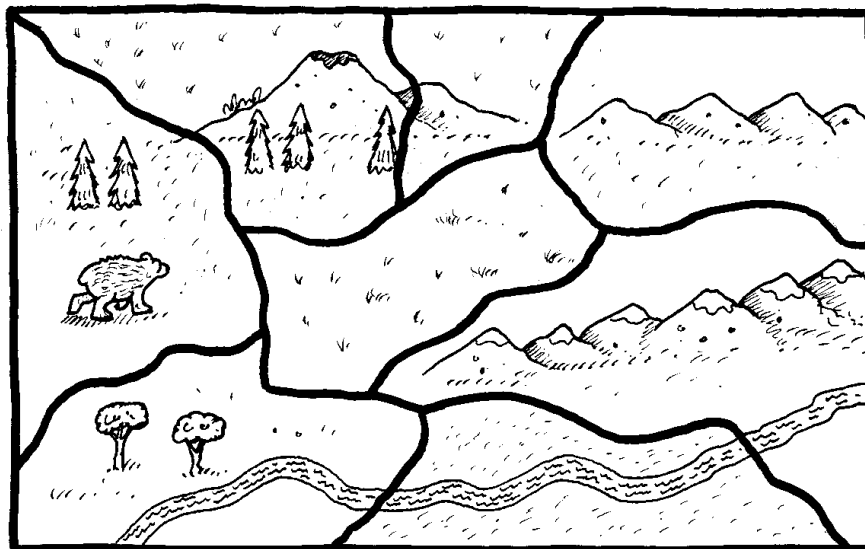
Περισσότερες πληροφορίες

Ο Harel πραγματεύεται το θεώρημα των τεσσάρων χρωμάτων, συμπεριλαμβανομένης και της ιστορίας του, στο βιβλίο *Algorithmics*. Περισσότερες πτυχές του προβλήματος χρωματισμού χαρτών συζητούνται στο *This is MEGA-Mathematics!* από τους Casey και Fellows. Περισσότερες πληροφορίες για τον χρωματισμό γράφων μπορούν να βρεθούν στο βιβλίο των Beineke και Wilson *Selected Topics in Graph Theory* και στο βιβλίο των Garey και Johnson *Computers and Intractability*.

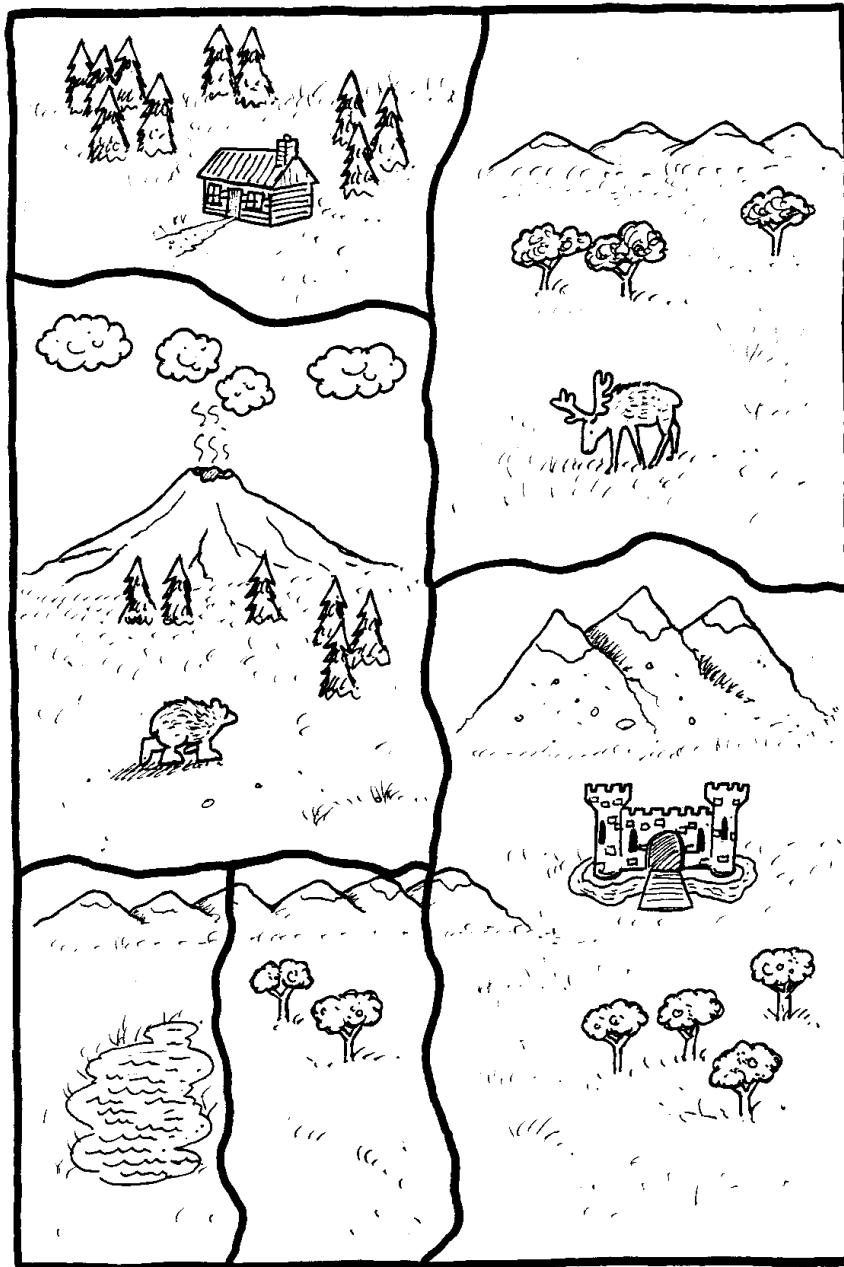
Μεταφράστηκε στα ελληνικά από τον Γιώργο Μπουκέα, το Φεβρουάριο του 2012.



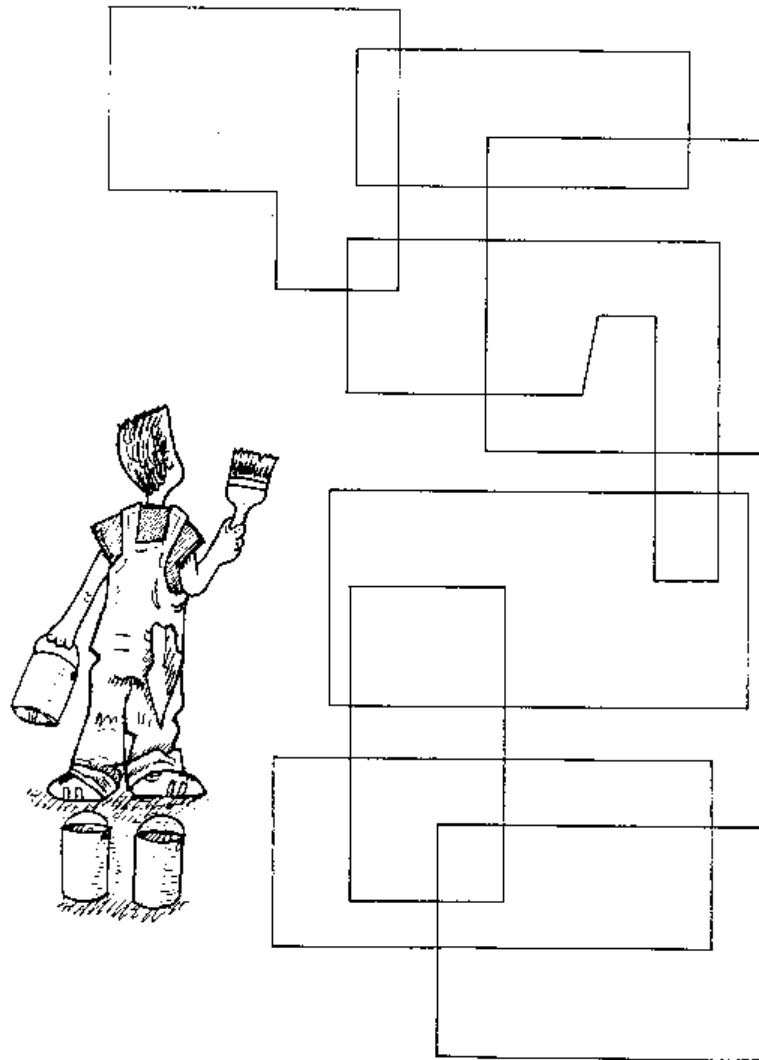
Οδηγίες: Χρωματίστε τις χώρες σε αυτόν τον χάρτη χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα, αλλά βεβαιωθείτε ότι όλες οι γειτονικές χώρες έχουν διαφορετικό χρώμα.



Οδηγίες: Χρωματίστε τις χώρες σε αυτόν τον χάρτη χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα, αλλά βεβαιωθείτε ότι όλες οι γειτονικές χώρες έχουν διαφορετικό χρώμα.



Οδηγίες: Χρωματίστε τις χώρες σε αυτόν τον χάρτη χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα, αλλά βεβαιωθείτε ότι όλες οι γειτονικές χώρες έχουν διαφορετικό χρώμα.



Οδηγίες: Χρωματίστε τις χώρες σε αυτόν τον χάρτη χρησιμοποιώντας όσο το δυνατόν λιγότερα χρώματα, αλλά βεβαιωθείτε ότι όλες οι γειτονικές χώρες έχουν διαφορετικό χρώμα.